E.N.S.I. 1984

Option M

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

N. B. — Il est demandé ***expressément*** *aux candidats de donner des démonstrations* ***claires, concises*** et ***rigoureuses.*** *Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.*

Les candidats doivent respecter les notations du texte et peuvent admettre le résultat d'une question non résolue pour traiter les questions suivantes.

Les différentes parties du problème ne sont pas indépendantes, les démonstrations de certaines questions pouvant faire appel aux résultats et notations des parties précédentes.

NOTATIONS :

E désigne le C-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continues, périodiques de période 2π.

Les applications f éléments de E sont *bornées et uniformément continues* sur $\mathbb{R}$ et

$$\|f\| = \text{Sup } \{ \ |f(x)| \ ; \ x \in \mathbb{R} \}$$

définit une norme sur E. (Il n'est pas demandé aux candidats de démontrer ces propriétés).

Pour f élément de E, on note $|f|$ (resp. $\text{Re}(f)$, $\text{Im}(f)$, $\overline{f}$) les applications définies par : $x \longmapsto |f(x)|$ (resp. $x \longmapsto \text{Re}\,(f(x))$, $x \longmapsto \text{Im}(f(x))$, $x \longmapsto \overline{f(x)}$).

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on désigne par ε_n l'élément de E défini par :

$$\varepsilon_n(x) = \cos nx + i \sin nx = e^{inx}$$

$\mathbb{R}_+ = \{ x \in \mathbb{R} \ ; \ x \geqslant 0 \}$

$K = \{ f \in E \ ; \ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \in \mathbb{R}_+ \}$

E^* = le dual algébrique de E (les éléments de E^* sont les *formes linéaires sur E*)

$K^+ = \{ L \in E^* \ ; \ \forall f \in K \quad L(f) \in \mathbb{R}_+ \}$

$$E' = \bigcup_{A \in \mathbb{R}_+} \{ L \in E^* \ ; \ \forall f \in E \quad |L(f)| \leqslant A \, \|f\| \}$$

(c'est-à-dire $L \in E' \Leftrightarrow$ il existe $A \geqslant 0$ tel que, pour tout $f \in E$, $|L(f)| \leqslant A \, \|f\|$).

E' est un sous espace vectoriel de E^* (il n'est pas demandé de démontrer cette propriété).

0

1° Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $f \in E$, on a :

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt$$

2° Calculer, pour $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Z}$

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} \varepsilon_n(t)\,dt$$

$$J_{n,m} = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} \varepsilon_n(t) \cos mt\,dt$$

.../...

I

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E, telle que la série de terme général $\|f_n\|$ $(n \in \mathbb{N})$ soit convergente.

1° Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ est absolument convergente.

On note, pour $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$, $\quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \quad$ et $\quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$

2° Montrer que S est périodique de période 2π.

3° Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$|S(x) - S_N(x)| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|$$

4° Montrer que, pour $x, x_0 \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$|S(x) - S(x_0)| \leqslant 2\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|\right) + |S_N(x) - S_N(x_0)|$$

En déduire que S est continue sur $\mathbb{R}$.

5° Montrer que la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers S dans l'espace normé $(E, \| \|)$.

6° Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la série de terme général :

$$\int_a^{a+2\pi} f_n(t)\,dt \quad (n \in \mathbb{N})$$

est convergente et que :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^{a+2\pi} f_n(t)\,dt\right) = \int_a^{a+2\pi} S(t)\,dt$$

.../...

II

Pour tout nombre réel $r \in]0,1[$, on note P_r l'application définie par :

$$P_r(x) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2}$$

1° Montrer que $P_r \in K$.

2° Étudier les variations de P_r sur $[-\pi, +\pi]$ et donner une représentation graphique pour $r = \frac{1}{2}$ et $r = \frac{4}{5}$ (unité : 1 cm).

3° Calculer $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P_r(x)\,dx$

4° Montrer que, pour tout $\alpha \in]0, \pi[$ on a :

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ r < 1}} (\operatorname{Sup}\{P_r(x) ; x \in [\alpha, \pi]\}) = 0$$

5° Pour $\alpha \in]0, \pi[$, calculer $\lim_{\substack{r \to 1 \\ r < 1}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{+\alpha} P_r(x)\,dx\right)$

6° Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $r \in]0, 1[$, la série de terme général $r^n \cos nx$ ($n \in \mathbb{N}$) est convergente et calculer :

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx$$

En déduire, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la valeur de :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(x)\, e^{-ikx}\,dx$$

7° Montrer que, pour tout $f \in E$, on a :

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ r < 1}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, P_r(x)\,dx\right) = f(0)$$

8° Pour $f, g \in E$, on note $f * g$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f * g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(t - x)\,dx$$

a. Montrer que $f * g \in E$

b. Montrer que $f * g = g * f$

c. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ r < 1}} [P_r * f(t)] = f(t)$$

9° Montrer que :

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ r < 1}} \| P_r * f - f \| = 0$$

.../...

III

Soit L un élément de K^+.

1° Montrer que, pour tout $f \in E$, on a :

$$L(|f|) \leqslant L(\varepsilon_0)\, \|f\|$$

2° Montrer que, si f est un élément de E à valeurs réelles (c'est-à-dire $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f(x) \in \mathbb{R}$) alors $L(f) \in \mathbb{R}$

3° Montrer que, pour tout f et g éléments de E, on a :

$$|L(f\bar{g})|^2 \leqslant L(|f|^2)\, L(|g|^2)$$

4° Montrer que, pour tout $f \in E$, on a $|L(f)| \leqslant L(\varepsilon_0)\, \|f\|$.
En déduire que $L \in E'$.

5° Donner un exemple de forme linéaire L élément de K^+.

IV

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $f \in E$, on pose :

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$$

1° Montrer que l'application ε_n^* définie sur E par $\varepsilon_n^*(f) = \widehat{f}(n)$ est un élément de E'.

2° Pour $f \in E$, $n \in \mathbb{Z}$ et $r \in]0, 1[$, calculer $\widehat{P_r * f}(n)$ en fonction de r, n et $\widehat{f}(n)$.

3° Montrer que, pour $f \in E$, $r \in]0, 1[$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$P_r * f(x) = \widehat{f}(0)\, \varepsilon_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[\widehat{f}(n)\, \varepsilon_n(x) + \widehat{f}(-n)\, \varepsilon_{-n}(x)\right]$$

V

Soit φ une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$. On dira que φ est de *type positif* si elle vérifie la propriété (P) suivante :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall\, k \in \mathbb{N}^* \qquad \forall\, (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{C}^k \\ \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \sum_{q=1}^{k} \varphi(p-q)\, z_p\, \bar{z}_q \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right.$$

Dans tout ce qui suit, φ désignera une application de type positif et r un nombre réel tel que $r \in]0, 1[$.

.../...

1° Montrer que :

a. $\varphi(0) \in \mathbb{R}_+$

b. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi(-n) = \overline{\varphi(n)}$

c. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|\varphi(n)| \leqslant \varphi(0)$

2° Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $\mathrm{Re}\,[\varphi(n)\, e^{-inx}]\, r^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est convergente et que l'application Φ_r définie par :

$$\Phi_r(x) = \varphi(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}[\varphi(n)\, e^{-inx}]\, r^n$$

est un élément de E.

3° Montrer que $\Phi_r \in K$.

4° Soit L_r l'application définie sur E par : $L_r(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\, \Phi_r(t)\, dt$

Montrer que $L_r \in K^+$.

5° *a.* Montrer que, pour tout $f \in E$, la série de terme général :
$[\varphi(n)\, \hat{f}(n) + \varphi(-n)\, \hat{f}(-n)]\, r^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est convergente.

b. Calculer $\varphi(0)\, \hat{f}(0) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [\varphi(n)\, \hat{f}(n) + \varphi(-n)\, \hat{f}(-n)]\, r^n$ en fonction de L_r et f.

6° Montrer que, pour tout $f \in E$ et $r, s \in]0, 1[$ on a :

$$L_r(P_s * f) = L_s(P_r * f)$$

7° *a.* Montrer que :

$$\forall f \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta \in]0, 1[\quad \forall r \in]\eta, 1[\quad \forall s \in]\eta, 1[$$
$$|L_r(f) - L_s(f)| \leqslant \varepsilon$$

b. Pour $f \in E$, on considère la suite :

$$\left(L_{1-\frac{1}{n}}(f)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

Que peut-on dire de cette suite ?

En déduire que, pour tout $f \in E$, $\lim\limits_{\substack{r \to 1 \\ r < 1}} L_r(f)$ existe

On notera alors L l'application définie sur E par :

$$L(f) = \lim_{\substack{r \to 1 \\ r < 1}} L_r(f)$$

8° *a.* Montrer que $L \in K^+$ et que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $L(\varepsilon_n) = \varphi(n)$.

b. Montrer que L est le seul élément de E′ satisfaisant à la propriété $L(\varepsilon_n) = \varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

c. Montrer que, si $M \in K^+$ alors l'application ψ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\psi(n) = M(\varepsilon_n)$ est une application de type positif.